



ORIENTAÇÃO PARA O PROFESSOR

INTRODUÇÃO

Podemos associar a uma permutação um sinal positivo (+) ou negativo (-), obtido contando-se o número de transposições (isto é, a troca da posição de dois elementos) necessárias para se obter a permutação.

Para exemplificar, consideremos as permutações dos números 1, 2 e 3:

1 2 3 → terá sinal (+) pois nenhuma troca foi feita.

2 1 3 → terá sinal (-) pois houve apenas uma troca (do 1 com o 2).

2 3 1 → terá sinal (+) pois trocamos o 1 com o 2 e, posteriormente, o 3 com o 1.

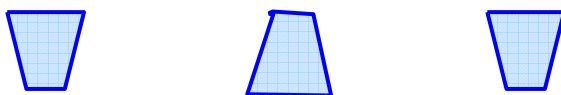
Uma permutação é sempre obtida por meio de uma série de transposições simples. Se ela for obtida por meio de um *número par de transposições*, seu sinal será +, e se for obtida por um *número ímpar de transposições*, seu sinal será -. O número de transposições de uma permutação pode mudar, mas a paridade não.

Questões que envolvem paridade servem muito freqüentemente para provar a impossibilidade de alguma tarefa. Para exemplificar um destes fenômenos, veja o desafio abaixo.

DISCUSSÃO

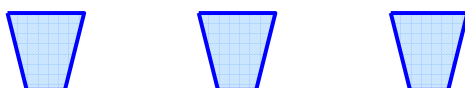
Inicialmente, a sala deverá ser dividida em grupos de, no máximo, 4 alunos. Cada grupo trabalhará com 3 copinhos plásticos. Os alunos deverão ler atentamente o texto, com o acompanhamento do professor. Em seguida, deverão responder as questões propostas. Sugere-se que o professor formule e apresente novos casos para os alunos solucionarem.

1º caso) Coloque três copinhos plásticos sobre a mesa, de acordo com a configuração abaixo: (dois copos para cima e o do centro para baixo)



Virando *simultaneamente* 2 desses copos, quantas vezes forem necessárias, tente deixar os 3 com a boca para baixo. A solução é muito simples, basta virar o primeiro e o último copo. Tente uma segunda solução (isto pode ser feito virando-se, por exemplo, o primeiro e o segundo copo e, a seguir, o segundo juntamente com o terceiro).

2º caso) Coloque os três copos agora da seguinte forma: (os três virados para cima)



Virando-se *simultaneamente* 2 copos, quantas vezes forem necessárias, tente deixar os 3 com a boca para baixo. Depois de algumas tentativas, a tarefa vai se revelar impossível. Como sabemos disto?

Associe ao copo com a boca virada para cima o número (+1) e ao copo virado para baixo o valor (-1). Assim, no primeiro caso apresentado acima, os copinhos tinham a configuração (+1) (-1) (+1).

Para que os três copos fiquem virados para cima devemos obter a configuração (+1) (+1) (+1). Veja o que ocorre com o produto dos três números, antes e depois da virada, respectivamente:

$$\begin{aligned} (+1) \cdot (-1) \cdot (+1) &= -1 \\ (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) &= -1 \end{aligned}$$

Observe que não temos a alteração do sinal deste produto ao virarmos simultaneamente dois copos. Logo, o primeiro caso tem solução.

No segundo caso, a configuração inicial era (+1) (+1) (+1). O produto desses três números é (+1). Este produto não se altera quando viramos simultaneamente dois copos (verifique esta afirmação). Dessa forma o produto nunca será (-1) e o problema não tem solução. Para deixar os três copos virados para baixo deveríamos ter: $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$

QUESTÃO

Considere a figura abaixo. Virando-se simultaneamente dois copos, é possível colocar os 5 com a boca virada para cima?



Resposta: Sim. Observe que a configuração inicial é

$$(-1) (+1) (+1) (-1) (+1),$$

cujo produto é (+1). Se os 5 copinhos estiverem com a boca virada para cima o produto também é igual a (+1). Logo, o problema tem solução.