



ORIENTAÇÃO PARA O PROFESSOR

INTRODUÇÃO

Através desse jogo bem interessante o professor pode abordar o conceito de probabilidade geométrica, que normalmente não é visto na escola fundamental e média. Neste kit, o conceito de Probabilidade Geométrica será abordado teoricamente e experimentalmente. Nas atividades a serem desenvolvidas, o professor trabalhará a compreensão intuitiva, a matematização inicial, a abstração, a formalização dos conceitos de função, constantes e variáveis, através do exemplo de uma função quadrática.

DISCUSSÃO

A simulação do jogo dos discos com os alunos tem múltiplos objetivos, tais como analisar aspectos experimentais, de modelagem e históricos, evidenciar a importância do ferramental matemático no estudo e resolução de problemas que ocorrem ou naturalmente ou como consequência da intervenção do homem, incentivar a reflexão e desenvolver o espírito crítico do aluno no que diz respeito a essa intervenção.

O material utilizado é o seguinte:

- 5 discos de 4cm de diâmetro
- 5 discos de 6cm de diâmetro
- 5 discos de 8cm de diâmetro
- 5 discos de 10cm de diâmetro
- 5 discos de 12cm de diâmetro
- 5 discos de 14cm de diâmetro

Sugere-se realizar esta atividade na sala de aula, pátio da escola ou outro ambiente em que o piso seja constituído de quadrados de 30cm de lado. Se a escola não possuir pisos com essa medida, os quadrados poderão ser desenhados no chão com giz ou fita crepe, por exemplo.

PROCEDIMENTO

- A sala deverá ser dividida em 6 grupos, cada qual trabalhará com um tipo de diâmetro.
- Cada grupo deverá ler atentamente o texto abaixo e, a seguir, fazer a simulação dos lançamentos com os discos.
- As anotações dos eventos deverão ser feitas na *Tabela de Lançamentos* e o resultado final deverá ser passado ao professor, o qual colocará na lousa os dados de todos os grupos (referente a cada diâmetro).
- Os grupos deverão então responder às questões sobre a atividade, que estão em anexo.
- O professor deverá orientar o preenchimento das tabelas, bem como a construção do gráfico.
- Ao final das atividades, o professor pode pedir para cada aluno fazer em anexo um relatório contando o desenvolvimento e resolução desta atividade.
- Se o professor já tiver alguma familiaridade com o uso de Mapa Conceitual, poderá fazer um fechamento dessa atividade como forma de avaliação
- Se o professor pretender usar um piso de outro tamanho, deverá fazer experimentos antecipadamente. Os pisos com peças defeituosas ou mal colocadas podem interferir significativamente no resultado.

- Observação: cada grupo deverá fazer, pelo menos, 200 lançamentos (arremessando os discos de costas).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS E MAIS INFORMAÇÕES

Texto adaptado de Hipertexto Pitágoras <http://www2.dm.ufscar.br/hp/> (Departamento de Matemática da UFSCar)

Revista do Professor de Matemática, da [Sociedade Brasileira de Matemática](#).

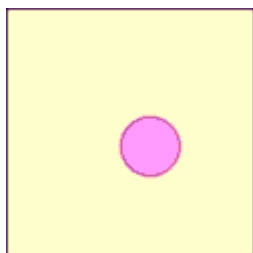
TEXTO: O JOGO DOS DISCOS

Uma escola estava preparando uma Festa Junina e foi pedido aos estudantes que bolassem um jogo para arrecadar fundos.

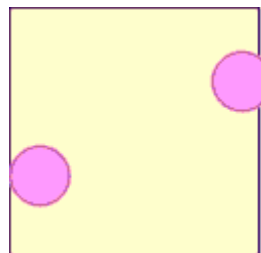
Os estudantes observaram que no pátio, onde seria montada a barraca do jogo, o piso era feito com quadrados de 30 cm de lado. Pensaram então em construir discos com um certo diâmetro d , que seriam comprados pelos visitantes por R\$ 1,00 cada um. O visitante jogaria os discos aleatoriamente no piso.

Se o disco depois de pousar ficasse inteiramente no interior do piso, sem tangenciar as bordas, ele receberia R\$2,00 (dois reais) (R\$1,00 como devolução e mais R\$1,00 como prêmio).

O problema dos estudantes consistia em determinar o diâmetro d dos discos de modo que o resultado fosse favorável aos formandos, sem prejudicar demasiadamente os jogadores. Assim resolveram que um acerto de 60% favorável aos formandos seria razoável.



Posição favorável ao jogador



Posição favorável aos formandos

Abaixo temos um exemplo da tabela que deverá ser exposta na lousa, pelo professor, com os resultados finais de cada grupo:

DIÂMETROS	QUANTIDADE DE DISCOS		
	Interiores	Tangentes	Restante
4 cm			
6 cm			
8 cm			
10 cm			
12 cm			
14 cm			
TOTAL			

QUESTÕES

1) Como os estudantes poderão determinar o valor do diâmetro d que resulta em uma probabilidade favorável ao jogador de 40%?

Resposta: (Veja “Solução através de experimentos” – página 5)

2) Se 500 discos forem vendidos na Festa Junina, qual será o provável ganho dos formandos?
Resposta: Calcule o ganho através dos resultados obtidos na simulação, feita com 1200 discos (utilizando a tabela exposta na lousa) e faça uma regra de três para determinar o ganho no caso de 500 discos.

3) O que muda no jogo se for feita a seguinte modificação: se o bordo do disco tangenciar o lado de um quadrado, a jogada não conta, e o jogador tem direito a jogar novamente. Qual a probabilidade de ocorrer esse caso?

Resposta: $P = (\text{Quantidade de discos tangentes})/1200$.

4) Construa um gráfico da probabilidade do jogador ganhar em função do diâmetro dos discos. Ao unir os pontos verifique com que curva se assemelha esta função.

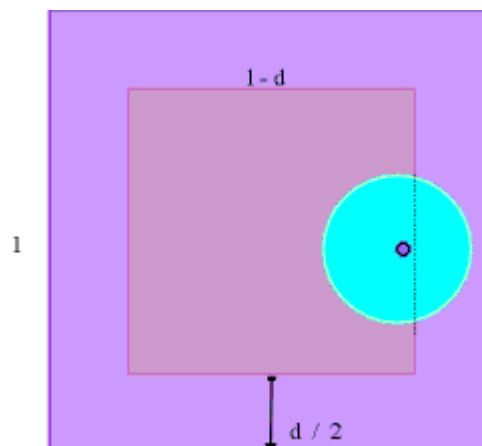
Resposta: (Veja “Solução através de experimentos” – página 5)

5) *Solução do Jogo dos Discos através do conceito de probabilidade geométrica:*

Considere a seguinte fórmula:

$$p = \frac{\text{área do quadrado menor}}{\text{área do quadrado maior}}$$

sendo p a probabilidade do disco ficar no interior do quadrado maior (veja figura abaixo).



a) Se os quadrados do piso têm lado l , qual a “fórmula” para o valor de d que resulta numa probabilidade p para o jogador?

Resposta: (Veja “Solução do Problema do Jogo dos Discos” – página 3)

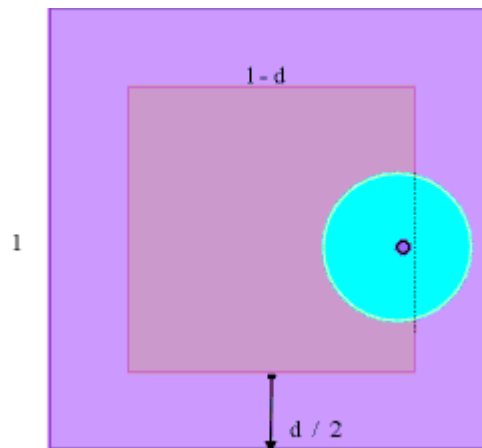
b) Represente o gráfico da função de p considerando $0 \leq d \leq l$, com $l \leq 30$.

Sugestão: Suponha que $d \leq l$, construa um quadrado de lado $l - d$ simetricamente disposto dentro do quadrado de lado l . Esta figura nos sugere que o jogador ganha se o centro do disco cair no interior do quadrado de lado $l - d$. Da definição de probabilidade geométrica encontre a função (fórmula), que se pede.

Resposta: (Veja “Solução do Problema do Jogo dos Discos” – página 5)

SOLUÇÃO DO PROBLEMA DO JOGO DOS DISCOS

Se $d \geq l$, a probabilidade de ocorrer um evento favorável é zero. Assuma $d < l$. Construindo um quadrado de lado $l - d$ simetricamente disposto dentro do quadrado de lado l (ver figura abaixo) vemos que o evento é favorável se o centro do disco cair no interior do quadrado de lado $l - d$. Sob condições ideais podemos supor que lançar o disco aleatoriamente no piso é o mesmo que lançar seu centro aleatoriamente. Assim a probabilidade p do evento ser favorável é a mesma probabilidade de um ponto, lançado aleatoriamente dentro do quadrado de lado l , cair dentro do quadrado de lado $l - d$.



Da definição de probabilidade geométrica tem-se:

$$p = \frac{\text{área do quadrado menor}}{\text{área do quadrado maior}}$$

ou

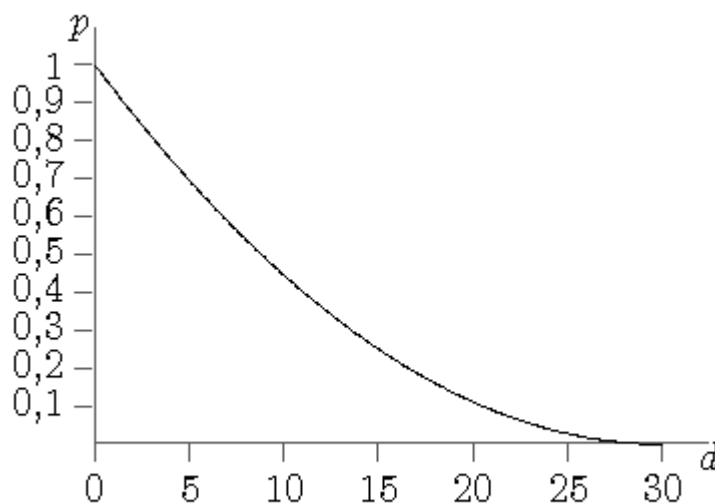
$$p = \frac{(1-d)^2}{1^2} = \frac{1}{1^2}d^2 - \frac{2}{1}d + 1.$$

Obtemos assim a função quadrática $P(d) = (1/l^2)d^2 - (2/l)d + 1$, e, para $0 \leq d \leq l$, $P(d)$ é a probabilidade de um disco de diâmetro d , lançado aleatoriamente, cair inteiramente no interior de um quadrado de lado l . Considerando que, se $d \geq l$, é zero a probabilidade de ocorrerem eventos favoráveis, tem-se:

$$P(d) = \begin{cases} \frac{1}{l^2}d^2 - \frac{2}{l}d + 1 & \text{se } 0 \leq d \leq l; \\ 0 & \text{se } d \geq l. \end{cases}$$

Observe que $P(l) = 0$. Assim nada muda no problema do jogo dos discos se passarmos a considerar como favoráveis os eventos em que o disco tangencia o lado de algum quadrado.

Apresentamos abaixo o gráfico de $P(d) = (1/30^2)d^2 - (1/15)d + 1$, em que consideramos $l = 30$. Observe que $d = 30$ é um zero duplo de $P(d)$.



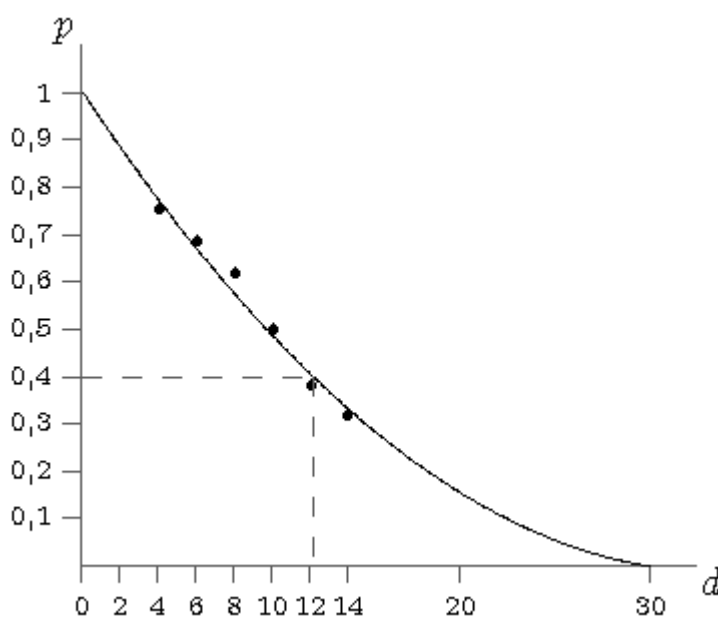
SOLUÇÃO ATRAVÉS DE EXPERIMENTOS

A solução do Jogo dos Discos através de simulação consiste em realizar um grande número de lançamentos com discos de vários diâmetros.

Para cada diâmetro fazemos o quociente do número de acertos do jogador pelo número de jogadas. Colocamos os dados num gráfico cartesiano em que o eixo dos x representa o diâmetro dos discos e o eixo dos y representa a probabilidade do jogador ganhar. Unindo-se os pontos assim conseguidos obtemos uma curva que se assemelha a uma parte do gráfico de uma função quadrática $P(d)$. Através desse gráfico procuramos o valor de d para o qual resulta $P(d) = 40\%$. Este é o valor aproximado.

Para resolver o problema por experimentação foram construídos discos de diâmetros 4, 6, 8, 10, 12 e 14 cm. Para facilitar a experiência foram feitos 5 discos de cada diâmetro. Foi observado que devem ser feitos pelo menos 200 lançamentos para cada diâmetro. Os resultados obtidos pela professora Gracia Aparecida de Almeida Sicheroli, em uma classe da 2ª série da Escola Estadual Washington Luiz, de Porto Ferreira, estão dispostos na tabela abaixo. Nesta tabela d é o diâmetro dos discos, em cm, e P é a probabilidade do jogador ganhar. Os lançamentos foram feitos em um piso conforme sugerido pelo problema (quadrados de 30 cm de lado).

d	P
4	75,5%
6	68,5%
8	62%
10	50%
12	38%
14	32%



No gráfico estão dispostos os pontos obtidos. Os estudantes, usando uma folha de papel quadriculado e uma régua, desenharam a curva que lhes pareceu ser a que melhor se aproximava dos pontos dados e obtiveram a solução $d \approx 11,5$. Ao fazer o gráfico foi usado o aplicativo computacional Maple V para obter a função quadrática que mais se aproxima dos pontos dados. Acrescentou-se na lista dos estudantes os pontos $(0,1)$ e $(30,0)$. A função obtida foi

$$P(d) = 0,0008977221246d^2 - 0,06051821065d + 1,004555785.$$

Resolvendo a equação $P(d) = 0,4$ em d temos $d \approx 12,2$.