MATEMATICA

12 GEOMETRIA II

Comprovação do Teorema de Pitágoras

CDCC - USP
EXPERIMENTOTECA

ORIENTAÇÃO PARA O PROFESSOR

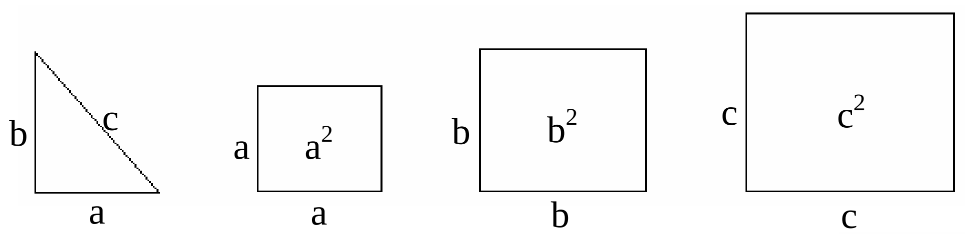
INTRODUÇÃO TEÓRICA

Dado um triângulo retângulo com hipotenusa **c** e catetos **a** e **b**, iremos comprovar (pois não é uma demonstração, apenas representação), experimentalmente, o teorema de Pitágoras, que diz:
"A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa", ou seja,

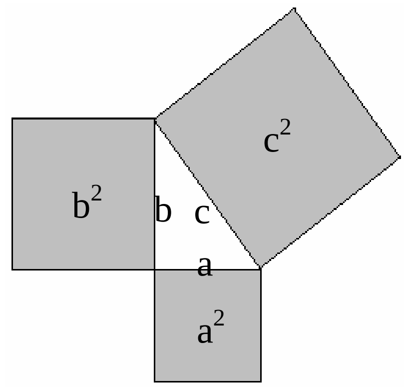
$$\boldsymbol{a^2+b^2=c^2}$$

DISCUSSÃO

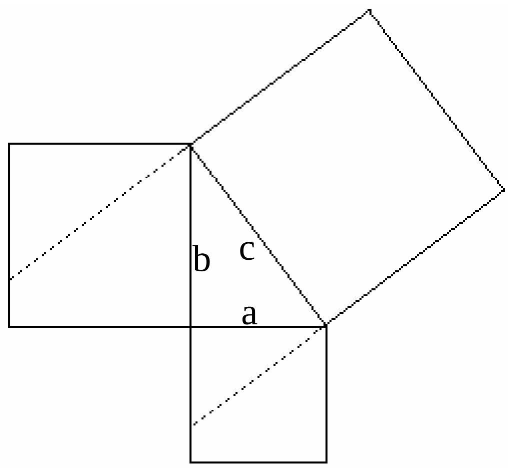
A atividade deverá ser desenvolvida com o acompanhamento do professor:
Considere as seguintes medidas: a=1,5cm, b=2cm e c=2,5cm.
Desenhe em seu caderno um triângulo retângulo (com lados **a**, **b** e **c**) e três quadrados (tendo lados **a**, **b** e **c**, respectivamente).



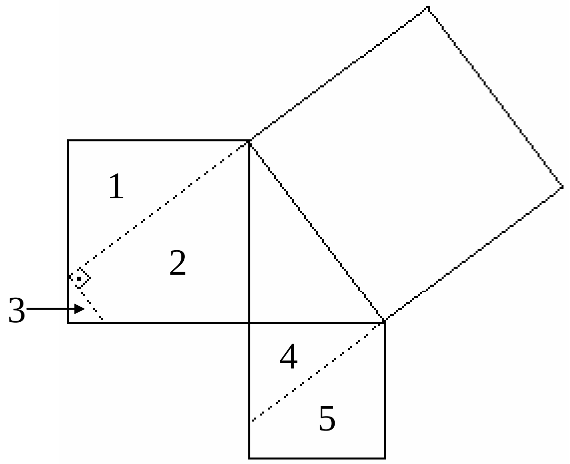
Como a área de um quadrado é dada por "lado × lado", podemos expressar as áreas dos quadrados acima respectivamente por $\mathbf{a^2}$, $\mathbf{b^2}$ e $\mathbf{c^2}$. Recorte essas figuras e posicione-as da seguinte maneira:



Prolongue os lados do quadrado maior, como indicado na figura a seguir:



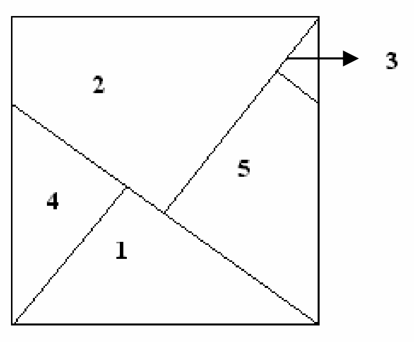
Construa agora um triângulo retângulo no quadrado de lado **b** (3):



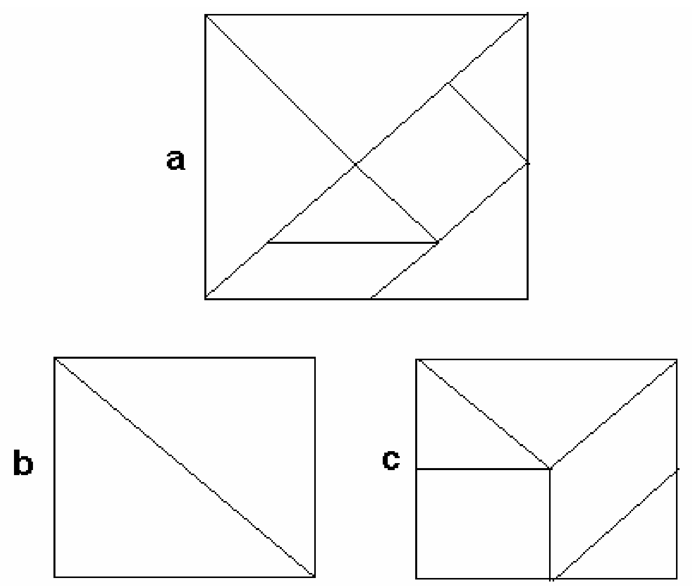
Observe que conseguimos dividir os quadrados em cinco partes. Enumere-as como na figura anterior. Recorte as cinco partes e tente cobrir o quadrado maior.

QUESTÕES

1) O que você pode concluir a partir do resultado que obteve?
Resposta: Que $\boldsymbol{a^2+b^2=c^2}$*. As peças, no quadrado maior, ficarão dispostas da seguinte forma:*

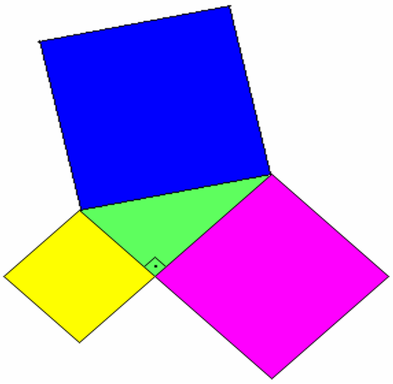


Com o tabuleiro e o tangram, que acompanham o kit, é possível realizar a demonstração do teorema de Pitágoras, de maneira similar à anterior. A ilustração abaixo mostra um exemplo de como as peças do tangram podem ser colocadas no tabuleiro para tal propósito. Apresente este tabuleiro aos alunos.

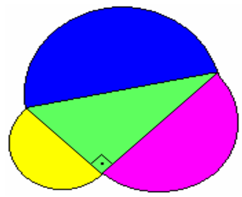


Importante: Para responder a questão a seguir, é necessário que o aluno já tenha trabalhado com o conceito de área de círculos.

2) Sabe-se que uma das representações geométricas do teorema de Pitágoras é a da "figura I" abaixo, em que os quadrados são construídos a partir das medidas dos lados do triângulo. Verifique se a "figura II" também representa, geometricamente, o teorema de Pitágoras. Ou seja, a soma das áreas dos dois semicírculos menores é equivalente à área do semicírculo maior? (Aqui os diâmetros dos semicírculos são os lados do triângulo retângulo.)



"Figura I"



"Figura II"

Resposta: Foi provado, na atividade anterior, que num triângulo retângulo

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad \text{(hipótese)}$$

sendo a, b os catetos e c a hipotenusa (veja figura I).

A figura II também representa, geometricamente, o teorema de Pitágoras.
Como os lados a, b e c do triângulo são diâmetros dos semicírculos 1, 2 e 3, respectivamente (veja figura II), a área de cada um deles é dada por:

$$S_1 = \frac{1}{2}\left[\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\right] = \frac{\pi}{8}a^2$$

$$S_2 = \frac{1}{2}\left[\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2\right] = \frac{\pi}{8}b^2$$

$$S_3 = \frac{1}{2}\left[\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2\right] = \frac{\pi}{8}c^2$$

(Lembrando-se que a área de um semicírculo é dada por S = $\frac{1}{2}\pi r^2$, sendo r o raio).

Então:

$$S_1 + S_2 = \frac{\pi}{8}a^2 + \frac{\pi}{8}b^2 = \frac{\pi}{8}\left(a^2 + b^2\right)$$

E como, por hipótese, $a^2 + b^2 = c^2$, temos:

$$S_1 + S_2 = \frac{\pi}{8}\left(a^2 + b^2\right) = \frac{\pi}{8}c^2 = S_3$$

Ou seja, mostramos que a soma das áreas dos semicírculos 1 e 2 (cujos diâmetros são os catetos do triângulo ABC) é igual à área do semi-círculo 3 (cujo diâmetro é a hipotenusa do triângulo ABC).